$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \ln(\tan x) = \lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$

D'où $g\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim_{0^+} g, \lim_{\frac{\pi}{2}} g\right[= \square$

5) a) g est strictement croissante sur $\square$ donc h est strictement croissante sur $\square$.

b) g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

de plus $g'(x) \neq 0. \forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Donc h est dérivable sur $\square$ et on a :

$$h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))}$$

$$= \frac{1}{\left[1+\tan^2 h(x)\right].\frac{1}{\tanh(x)}}$$

$$h'(x) = \frac{\tanh(x)}{1+\tan^2 h(x)}.$$

Or $g(h(x)) = x$ et $g(h(x)) = \ln\left|\tan h(x)\right|$

$\Leftrightarrow g(h(x)) = x = \ln(\tan[h(x)])$

$\Leftrightarrow \boxed{\tan(h(x)) = e^x}$

D'où

$$h'(x) = \frac{e^x}{1+(e^x)^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} = f(x)$$

Donc

$\boxed{\forall x \in \square : h'(x) = f(x)}$

c) $f(x) > 0, \forall x \in \square$

Donc $h'(x) > 0, \forall x \in \square$

et par suite h est strictement croissante sur $\square$.

Exercice 12

$$f(x) = 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

1) f est définie si $e^x - 1 \neq 0$.

Or $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Donc $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty + 0 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{e^x}} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = 0 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = 0 - \infty = -\infty$$

2)a) $x \in \square^*, 2\times0 - x = -x \in \square$

$$f(2\times0 - x) = f(-x) = 2\times(-x) + \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 1}$$

$$= -2x + \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 1} \times \frac{e^x}{e^x} = -2x + \frac{1}{1-e^x}$$

On a :

$$f(-x) + f(x) = -2x + \frac{1}{1-e^x} + 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$= -\frac{1}{e^x - 1} + \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1}{e^x - 1} = 1$$

$\left(f(-x) + f(x) = 1 = 2\times(0,5)\right)$

Ce qui donne :

$$f(2\times0 - x) = 2\times(0,5) - f(x)$$

Donc $I(0;0,5)$ est un centre de symétrie pour C.

b) $$f'(x) = 2 + \frac{(e^x)'(e^x - 1) - e^x(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2}$$

$$= 2 + \frac{e^x(e^x - 1) - e^x.e^x}{(e^x - 1)^2} = 2 + \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x}}{(e^x - 1)^2}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2(e^x - 1)^2 - e^x}{(e^x - 1)^2}$$